УДК 517.764
DOI 10.21685/2072-3040-2017-4-2

К. М. Зубрилин

УПЛОЩЕННЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫМИ ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Изучение лифтов инфинитезимальных преобразований восходит к работам K. Yano и S. Ishihara. В частности, ими выявлены условия, при которых полный лифт инфинитезимального проективного преобразования является инфинитезимальным проективным преобразованием относительно связности полного лифта. В общем случае геометрическая природа полного лифта инфинитезимального преобразования ими не установлена. В работах С. Г. Лейко она была освещена в рамках теории уплощенных отображений. Целью данной работы является изучение уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования. Касательное расслоение рассматривается как аффинносвязное пространство со связностью горизонтального лифта.

Материалы и методы. В работе используется аппарат тензорной алгебры и анализа, инструментарий теории лифтов из базисного многообразия в касательное расслоение. Введено понятие уплощения, сообщаемого кривой векторным полем. С этой точки зрения определяются уплощенные инфинитезимальные преобразования (p-геодезические инфинитезимальные преобразования в терминологии С. Г. Лейко) и получаются из уравнения в инвариантной форме. Ввиду того что горизонтальный лифт аффинной связности представляет собой аффинную связность на касательном расслоении с нетривиальным кручением, для изучения уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования вводится в рассмотрение новый тип лифтирования из базисного многообразия в касательное расслоение. Роль, которую играет E-лифт в ковариантном дифференцировании относительно связности горизонтального лифта, иллюстрируют полученные свойства.

Результаты. Уплощенные инфинитезимальные преобразования рассмотрены с точки зрения введенного понятия уплощения, сообщаемого кривой векторным полем. Получен инструментарий для исследования уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального преобразования относительно связности горизонтального лифта. Его использование позволило выявить уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования относительно связности горизонтального лифта.

Выводы. Полный лифт инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования относительно связности горизонтального лифта является: (1) 1-г.и.п. тогда и только тогда, когда базисное инфинитезимальное преобразование является аффинным; (2) 2-г.и.п. тогда и только тогда, когда ковекторное поле, определяющее инфинитезимальное голоморфно-проективное преобразование ковариантно постоянно; (3) r-г.и.п. ($r = 3, 4, 5$) тогда и только тогда, когда миноры r-го порядка матрицы коэффициентов, расположенные в первых r строках и первых шести столбцах, равны нулю; (4) в общем случае 6-г.и.п.; (5) абсолютно каноническим r-г.и.п. ($r = 3, 4, 5$) если $S_{2,\dots,r}\left(\nabla^{r-1}\beta\right) = 0$.

Ключевые слова: уплощение, порядок уплощения, p-геодезическая кривая, уплощенная кривая, p-геодезическое отображение, уплощенное отображение, p-геодезическое инфинитезимальное преобразование.

K. M. Zubrilin

FLATTENED INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS OF THE TANGENT BUNDLE WITH HORIZONTAL LIFT CONNECTION, GENERATED BY INFINITESIMAL HOLOMORPHICALLY PROJECTIVE TRANSFORMATIONS

Abstract.

Background. The study of infinitesimal transformation lifts goes back to works by K. Yano and S. Ishihara. In particular, they reveal conditions at which the complete lift of infinitesimal projective transformation is the infinitesimal projective transformation with respect to the complete lift connection. Generally the geometrical nature of the complete lift of infinitesimal transformation has not been established by them. In S. G. Lejko's works, it has been presented within the limits of the flattening maps theory. The purpose of the given work is to study flattening properties of the complete lift of infinitesimal holomorphically projective transformation. The tangent bundle is considered as an affinely connected space with the horizontal lift connection.

Materials and methods. The work uses methods of tensor algebra and analysis, the toolkit of the theory of lifts from the basis manifold into the tangent bundle. Added by the vector's field curve, the concept of flattening is introduced. From this point of view the flattening infinitesimal transformations (r-geodetic infinitesimal transformations according to S. G. Lejko's terminology) are defined and, also, their equations are obtained in the invariant form. The horizontal lift of the affine connection represents the affine connection on the tangent bundle with the nontrivial torsion. Therefore the new type of lifting from the basis manifold into the tangent bundle is introduced in order to study the flattening properties of the complete lift of infinitesimal holomorphically projective transformation. The received properties of the E-lift show the role it plays in covariant differentiation concerning of the horizontal lift connection.

Results. The flattened infinitesimal transformations are considered from the point of view of the introduced concept of flattening added by the vector field's curve. The authors have obtained the toolkit to investigate the flattening properties of the complete lift of infinitesimal transformation with respect to the horizontal lift connection. Its use has allowed to reveal the flattening properties of the complete lift of infinitesimal holomorphically projective transformation with respect to the horizontal lift connection.

Conclusions. The complete lift of the infinitesimal holomorphically projective transformation with respect to the horizontal lift connection is: (1) 1-g.i.t. if and only if the basis infinitesimal transformation is affine; (2) 2-g.i.t. if and only if the covector field that defines the infinitesimal holomorphically projective transformation is covariant constantly; (3) r-g.i.t. (r=3,4,5) if and only if minors of the r-order of the coefficient matrix, located in the first r-rows and six columns, equal to zero; (4) generally 6-g.i.t.; (5) absolutely canonical r-g.i.t. (r=3,4,5) if $S_{2,\dots,r}\left(\nabla^{r-1}\beta\right)=0$.

Key words: flattening, order of flattening, p-geodesic curve, flattening curve, p-geodesic map, flattening map, p-geodesic infinitesimal transformation.

Введение

Лифты инфинитезимальных преобразований изучались в работах K. Yano и S. Ishihara [1, 2]. Ими выявлено, что полный лифт инфинитезиального проективного преобразования является инфинитезимальным проективным преобразованием относительно связности полного лифта, тогда и только тогда, когда исходное преобразование является инфинитезимальным аффинным. Общая геометрическая природа полного лифта инфинитезимального преобразования ими не установлена. В цикле работ С. Г. Лейко она была освещена в рамках теории уплощенных отображений. А именно, С. Г. Лейко рассматривает уплощенные инфинитезимальные преобразования, так называемые r-геодезические инфинитезимальные преобразования (r-г.и.п.). С этой точки зрения им получено полное описание уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального проективного и конциркулярного преобразований относительно связности полного лифта для касательного расслоения первого и второго порядков [3, 4]. Случай касательного расслоения второго порядка рассмотрен в работе [5], а в статье [6] рассматриваются уплощенные инфинитезимальные преобразования касательных расслоений первого и второго порядков (относительно связности полного лифта), порожденные лифтами инфинитезимальных голоморфно-проективных преобразований келеровых пространств.

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования. Касательное расслоение рассматривается как аффинносвязное пространство со связностью горизонтального лифта. Ввиду того что горизонтальный лифт аффинной связности представляет собой аффинную связность на касательном расслоении с нетривиальным кручением, потребовалось ввести в рассмотрение новый тип лифтирования в касательное расслоение. Роль, которую играет E-лифт в ковариантном дифференцировании относительно связности горизонтального лифта, иллюстрируют полученные свойства.

1. Уплощенные кривые

Пусть в аффинносвязном пространстве (M,∇) взята кривая C, отнесенная к параметру t; ξ – поле касательных векторов вдоль кривой C. Вектор первой кривизны ξ_1 определяется как ковариантная производная от поля касательных векторов ξ, т.е. $\xi_1=\nabla_t\xi$. Вектор q-й кривизны ξ_q определяется индуктивно $\xi_q=\nabla_t\xi_{q-1}$.

Определение 1. Произвольно возьмем точку $p\in C$ на кривой C. Если в точке p векторы ξ, ξ_1, …, ξ_{m-1} линейно независимы, а векторы ξ, ξ_1, …, ξ_{m-1}, ξ_m линейно зависимы, то говорят, что кривая C в точке p имеет уплощение m-го порядка; число m называется порядком уплощения точки p кривой C.

По свойствам внешнего произведения, условия

$$\xi\wedge\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{m-1}\wedge\xi_m=0\,,\ \xi\wedge\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{m-1}\neq 0, \tag{1}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы кривая C имела в точке p уплощение m-го порядка.

Определение 2. Наибольший из порядков уплощения в каждой точке кривой C называется максимальным порядком уплощения кривой C.

В каждой точке кривой C с максимальным порядком уплощения, равным m, векторы ξ, ξ_1, …, ξ_{m-1}, ξ_m линейно зависимы, и при этом есть точки кривой C, в которых векторы ξ, ξ_1, …, ξ_{m-1} линейно независимы. Таким образом, необходимыми и достаточными условиями кривой C максимального порядка уплощения m являются выполнения равенства

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{m-1} \wedge \xi_m = 0$$

в каждой точке кривой C и выполнения неравенства

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_{m-1} \neq 0$$

в некоторых ее точках.

Определение 3. Кривая C в аффинносвязном пространстве (M, ∇) называется m-геодезической, если в каждой своей точке она имеет уплощение m-го порядка.

Иначе говоря, кривая C является m-геодезической кривой, если порядок уплощения в каждой ее точке совпадает с максимальным порядком уплощения этой кривой, который равен m.

Для того чтобы кривая C была m-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее выполнялись условия (1).

2. Уплощенные диффеоморфизмы

Теорема 1. Пусть в многообразии M задана кривая C, отнесенная к параметру t, $f : M \to \bar{M}$ – диффеоморфизм многообразия M на аффинно-связное пространство $(\bar{M}, \bar{\nabla})$, и $\tilde{\nabla}$ – перенос $f^*\bar{\nabla}$ аффинной связности $\bar{\nabla}$ посредством диффеоморфизма f.

Тогда векторное поле $\bar{\xi}_m$ m-й кривизны кривой образа $\bar{C} = f(C)$ относительно связности $\bar{\nabla}$ совпадает с переносом векторного поля $\tilde{\xi}_m$ m-й кривизны кривой C относительно переноса $\tilde{\nabla}$, т.е.

$$\bar{\xi}_m = f_* \tilde{\xi}_m, \quad m = 1, 2, ...$$

Доказательство проводится индукцией по m. Предположим, что утверждение верно для $m = k$, т.е. $\bar{\xi}_k = f_* \tilde{\xi}_k$. Применяя лемму о ковариантной производной переноса, получим $\bar{\xi}_{k+1} = \bar{\nabla}_t \bar{\xi}_k = \bar{\nabla}_t \left(f_* \tilde{\xi}_k \right) = f_* \left(\tilde{\nabla}_t \tilde{\xi}_k \right) =$ $= f_* \tilde{\xi}_{k+1}$, что и требовалось доказать.

Отсюда уже получается

Теорема 2. Пусть $f : M \to \bar{M}$ – диффеоморфизм многообразия M на аффинно-связное пространство $(\bar{M}, \bar{\nabla})$; $\tilde{\nabla}$ – перенос $f^*\bar{\nabla}$ аффинной связности $\bar{\nabla}$ посредством диффеоморфизма f; C – гладкая кривая в многообразии M; $\bar{C} = f(C)$ – кривая-образ на $\bar{M}$.

Для того чтобы в точке $f(p) \in \bar{C}$, $p \in C$, кривая-образ $\bar{C}$ имела уплощение k-го порядка относительно связности $\bar{\nabla}$, необходимо и достаточно, чтобы в точке $p \in C$ кривая C имела уплощение k-го порядка относительно переноса $\tilde{\nabla}$.

Доказательство получается из предыдущей теоремы и того факта, что дифференциал $(f_*)_p : \mathbf{T}_p M \to \mathbf{T}_{f(p)}\bar{M}$ является изоморфизмом структуры линейного пространства.

3. Уплощенные инфинитезимальные преобразования

Рассмотрим векторное поле X на аффинносвязном пространстве (M, ∇), которое порождает поток $\varphi_t : D_t \to M$, $D_t \subset M$, $|t| < \varepsilon$ (см. [7] или 1-параметрическую группу [8]).

Пусть C – гладкая кривая в M и ξ_m – поле векторов m-й кривизны вдоль кривой C. Под действием преобразования $\varphi_t : D_t \to M$ кривая C переходит в кривую-образ $C^{(t)} = \varphi_t(C)$. Рассмотрим поле $\xi_m^{(t)}$ векторов m-й кривизны вдоль кривой-образа $C^{(t)}$. Тогда $\varphi_t^* \xi_m^{(t)}$ – перенос векторного поля $\xi_m^{(t)}$ на кривую C.

Определение 4. Производной Ли от вектора кривизны m-го порядка кривой C в точке p относительно векторного поля X называется предел

$$(L_X \xi_m)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\varphi_t^* \xi_m^{(t)}\right)_p - (\xi_m)_p}{t}.$$

Пусть $\varphi_t^* \nabla$ – перенос аффинной связности ∇ посредством преобразования $\varphi_t : D_t \to M$. Если $\tilde{\xi}_m^{(t)}$ поле векторов m-й кривизны вдоль кривой C относительно переноса $\varphi_t^* \nabla$, то согласно теореме 1 имеем $\tilde{\xi}_m^{(t)} = \varphi_t^* \xi_m^{(t)}$. Поскольку $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$ – тождественное отображение, то $\varphi_0^* \nabla = \nabla$. В таком случае $\tilde{\xi}_m^{(0)} = \xi_m$.

Пусть $\gamma : P \to M$ – параметризация кривой C. Тогда имеем

$$L_X \xi_{m\,\gamma(s)} = \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{\xi}^{(t)}_{m\,\gamma(s)} - \xi_{m\,\gamma(s)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{\xi}^{(t)}_{m\,\gamma(s)} - \tilde{\xi}^{(0)}_{m\,\gamma(s)}}{t} = \left.\frac{\partial \tilde{\xi}^{(t)}_{m\,\gamma(s)}}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

По определению вектора m-й кривизны, получим в координатной окрестности $\tilde{\xi}^{(t)\,k}_{m\,\gamma(s)} = \left(\varphi_t^* \nabla\right)_s \tilde{\xi}^{(t)\,k}_{m-1\,\gamma(s)}$, $\xi^{\,k}_{m\,\gamma(s)} = \nabla_s \xi^{\,k}_{m-1\,\gamma(s)}$. В таком случае, собирая все вместе, приходим к равенству

$$L_X \xi_m{}^k_{\gamma(s)} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\varphi_t^* \nabla\right)_s \overset{(t)}{\xi}_{m-1}{}^k_{\gamma(s)} - \nabla_s \xi_{m-1}{}^k_{\gamma(s)}}{t} =$$

$$= \frac{\partial L_X \xi_{m-1}{}^k_{\gamma(s)}}{\partial s} + \Gamma_{i\,j}^k\left(\gamma(s)\right)\xi^i_{\gamma(s)} L_X \xi_{m-1}{}^j_{\gamma(s)} + L_X \Gamma_{i\,j}^k\left(\gamma(s)\right)\xi^i_{\gamma(s)}\xi_{m-1}{}^j_{\gamma(s)} =$$

$$= \nabla_s \left(L_X \xi_{m-1}\right)^k_{\gamma(s)} + \left(L_X \nabla\right)_{\gamma(s)}\left(\xi_{\gamma(s)}, \xi_{m-1\,\gamma(s)}\right)^k$$

для любого $k = \overline{1,n}$, что влечет равенство

$$\mathrm{L}_X \xi_m = \nabla_s \left(\mathrm{L}_X \xi_{m-1}\right) + \mathrm{L}_X \nabla\left(\xi, \xi_{m-1}\right). \tag{2}$$

Предложение 1. Для произвольной геодезической кривой C, отнесенной к каноническому параметру s, производная Ли от вектора m-й кривизны имеет вид

$$L_X \xi_m = L_{m,X}\big(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{m+1}\big), \tag{3}$$

где последовательность $\left(L_{m,X}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ тензорных полей $L_{m,X} \in \mathfrak{T}^1_{m+1}(M)$ определяется по индукции правилом

$$L_{1,X} = L_X \nabla,\ L_{m,X} = \nabla L_{m-1,X}.$$

Доказательство. Поскольку геодезическая кривая C отнесена к каноническому параметру s, то все вектора кривизн $\xi_m = 0$, $m \ge 1$. Тогда из равенства

$$\frac{d\xi^k_{\gamma(s)}}{dt} + \Gamma_{i\,j}^k\left(\gamma(s)\right)\xi^i_{\gamma(s)}\xi^j_{\gamma(s)} = \xi_1{}^k_{\gamma(s)} = 0,$$

получив выражение для производной $\dfrac{d\xi^k_{\gamma(s)}}{dt}$, имеем

$$L_X \xi_1{}^k_{\gamma(s)} = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{(t)}{\xi}_1{}^k_{\gamma(s)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^* \Gamma_{i\,j}^k\left(\gamma(s)\right) - \Gamma_{i\,j}^k\left(\gamma(s)\right)}{t}\xi^i_{\gamma(s)}\xi^j_{\gamma(s)} =$$

$$= L_X \Gamma_{i\,j}^k\left(\gamma(s)\right)\xi^i_{\gamma(s)}\xi^j_{\gamma(s)} = \left(L_X \nabla\right)_{\gamma(s)}\left(\xi_{\gamma(s)}, \xi_{\gamma(s)}\right)^k,$$

что влечет равенство $L_X \xi_1 = \left(L_X \nabla\right)(\xi, \xi) = L_{1,X}(\xi, \xi)$.

Пусть утверждение верно для $m-1$, т.е. $L_X \xi_{m-1} = L_{m-1,X}\big(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{m}\big)$.

Учитывая равенство (2), получим

$$L_X \xi_m = \nabla_s \left(L_X \xi_{m-1}\right) + L_X \nabla\left(\xi, \xi_{m-1}\right) = \nabla_s \Big(L_{m-1,X}\big(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{m}\big)\Big) + L_X \nabla\big(\xi, \underbrace{\xi_{m-1}}_{=0}\big) =$$

$$= \nabla L_{m-1,X}(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{m},\xi) + L_{m-1,X}(\underbrace{\nabla_s\xi,\ldots,\xi}_{m}) + \ldots + L_{m-1,X}(\underbrace{\xi,\ldots,\nabla_s\xi}_{m}) =$$

$$= \nabla L_{m-1,X}(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{m},\xi) = L_{m,X}(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{m+1}),$$

что завершает доказательство.

Замечание (о краткой форме записи). Для произвольного s раз ковариантного тензора P вместо $P(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{s})$ будем писать $P\left(\xi^s\right)$.

Определение 5. Говорят, что векторное поле X сообщает кривой C в точке $p \in C$ уплощение r-го порядка, если векторы ξ_p, $\left(L_X\xi_1\right)_p$, …, $\left(L_X\xi_{m-1}\right)_p$ линейно независимы, а векторы ξ_p, $\left(L_X\xi_1\right)_p$, …, $\left(L_X\xi_{m-1}\right)_p$, $\left(L_X\xi_m\right)_p$ линейно зависимы.

Учитывая критерий линейной независимости векторов через внешнее произведение, получим необходимые и достаточные условия уплощения r-го порядка, сообщаемого векторным полем X кривой C в точке p:

$$\xi \wedge L_X\xi_1 \wedge \ldots \wedge L_X\xi_{m-1} \wedge L_X\xi_m = 0\,,\ \xi \wedge L_X\xi_1 \wedge \ldots \wedge L_X\xi_{m-1} \neq 0\,. \qquad (4)$$

Наибольший из порядков уплощения точек кривой C сообщаемых векторным полем X, будем называть *максимальным порядком уплощения кривой C, сообщаемым векторным полем X*.

Определение 6. Векторное поле X называется r-геодезическим инфинитезимальным преобразованием (r-г.и.п.), если оно любой геодезической кривой сообщает максимальный порядок уплощения $\leq r$, и при этом существует по крайней мере одна геодезическая кривая, максимальный порядок уплощения которой равен r.

r-г.и.п. называется *абсолютно каноническим*, если $L_X\xi_m = 0$ вдоль любой геодезической кривой.

Учитывая равенство (3) в равенстве (4), получим необходимые и достаточные условия r-г.и.п.

$$\delta(\xi) \wedge L_{1,X}\left(\xi^2\right) \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X}\left(\xi^m\right) \wedge L_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right) = 0 \text{ для всех } \xi$$

$$\text{и } \delta(\xi) \wedge L_{1,X}\left(\xi^2\right) \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X}\left(\xi^m\right) \neq 0 \text{ для некоторого } \xi\,.$$

При этом условия абсолютной каноничности примут вид

$$L_{m,X}\left(\xi^{m+1}\right) = 0 \text{ для всех } \xi\,.$$

Отсюда уже получаем необходимые и достаточные условия r-г.и.п.:

$$\begin{cases} \mathrm{S}\left(\delta \wedge L_{1,X} \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X} \wedge L_{m,X}\right) = 0, \\ \mathrm{S}\left(\delta \wedge L_{1,X} \wedge \ldots \wedge L_{m-1,X}\right) \neq 0, \end{cases}$$

представляющие собой уравнения в инвариантной форме, полученные С. Г. Лейко.

4. Инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования

Определение 7 [9]. Келеровым (*Kählerian*) пространством будем называть многообразие M размерности $n = 2m > 2$ с заданными на нем (псевдо) римановой метрикой g и комплексной структурой F, которые удовлетворяют условиям:

(1) $F^2 = -\delta$;

(2) $g\left(F(X), Y\right) + g\left(X, F(Y)\right) = 0$,

для произвольных векторных полей X и Y на M;

(3) $\nabla F = 0$,

где ∇ – связность Леви – Чевитта метрического тензора g.

Определение 8. Будем говорить, что векторное поле X есть инфинитезимальное голоморфно-проективное преобразование, или просто HP-преобразование (см. [9]), если оно удовлетворяет условию

$$\mathrm{L}_X \nabla = \beta \otimes \delta + \delta \otimes \beta - \overline{\beta} \otimes F - F \otimes \overline{\beta},$$

где β – некоторое ковекторное поле на M, $\overline{\beta} = \beta \circ F$ – сопряженное с ним ковекторное поле.

Замечание (свойства ковекторных полей β и $\overline{\beta}$). Ковариантные дифференциалы ковекторных полей β и $\overline{\beta}$ связаны равенствами

$$\nabla \overline{\beta} = \nabla \beta \circ \left(F \times \mathrm{id}\right),\ \nabla \beta = -\nabla \overline{\beta} \circ \left(F \times \mathrm{id}\right),$$

где id – единичный аффинор.

Методом математической индукции проверяется, что

$$\nabla^m \overline{\beta} = \nabla^m \beta \circ \left(F \times \underbrace{\mathrm{id} \times \ldots \times \mathrm{id}}_{m} \right),\ \nabla^m \beta = -\nabla^m \overline{\beta} \circ \left(F \times \underbrace{\mathrm{id} \times \ldots \times \mathrm{id}}_{m} \right),$$

где

$$\nabla^m \beta \circ \left(F \times \underbrace{\mathrm{id} \times \ldots \times \mathrm{id}}_{m} \right) = \underbrace{c_1^1 \ldots c_1^1}_{m+1} \left(\nabla^m \beta \otimes F \otimes \underbrace{\mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}}_{m} \right).$$

Если $\beta = 0$, то HP-преобразование вырождается в *аффинное*. Этот случай будем считать *тривиальным*.

Ковекторные поля β и $\overline{\beta}$ обладают рядом свойств, которыми мы будем пользоваться дальше. Как показано в [9], в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$ имеют место равенства

$$\nabla_j \beta_i = -\frac{1}{n+2} L_X R_{ji},$$

где $R_{ji} = R^{\alpha}_{\alpha j,i}$ – тензор Риччи. Кроме того, верно равенство

$$\nabla_j \overline{\beta}_i + \nabla_i \overline{\beta}_j = 0,$$

которое показывает, что

$$S\left(\nabla\overline{\beta}\right) = 0,$$

где S – оператор симметрирования.

Более того, для каждого натурального m верно равенство $S\left(\nabla^m\overline{\beta}\right) = 0$.

Предложение 2. Если X – инфинитезимальное голоморфно-проективное преобразование, то

$$L_{m,X} = \overbrace{\nabla^{m-1}\beta\otimes\delta}^{\left.\begin{matrix}2\leftarrow 3\\ \cdots\\ m\leftarrow m+1\end{matrix}\right\} m-1} + \delta\otimes\nabla^{m-1}\beta - \overbrace{\nabla^{m-1}\overline{\beta}\otimes F}^{\begin{matrix}2\leftarrow 3\\ \cdots\\ m\leftarrow m+1\end{matrix}} - F\otimes\nabla^{m-1}\overline{\beta},$$

где

$$k\leftarrow l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \cdots & l-1 & l & l+1 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & l & k & k+1 & \cdots & l-2 & l-1 & l+1 & \cdots & r \end{pmatrix}$$

перестановка элемента l на k-е место со сдвигом или просто перестановка со сдвигом.

Доказательство проводится методом математической индукции по числу m и получается из свойств ковариантного дифференциала, оператора перестановки и определения перестановки со сдвигом.

5. Необходимые сведения из теории лифтов

Определение 9. $\underset{k}{\gamma}$-оператором будем называть отображение $\mathfrak{T}^r_s(M)\to\mathfrak{T}^r_{s-1}(\mathbf{T}M)$, которое каждому тензорному полю $T\in\mathfrak{T}^r_s(M)$, имеющему в карте $\left(U;u^i\right)$ разложение

$$T = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\cdots j_{k-1}j_k j_{k+1}\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\otimes$$

$$\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_{k-1}}\otimes du^{j_k}\otimes du^{j_{k+1}}\otimes\ldots\otimes du^{j_s},$$

сопоставляет тензорное поле $\underset{k}{\gamma}T\in\mathfrak{T}^r_{s-1}(\mathbf{T}M)$, имеющее в индуцированной карте $\left(\pi^{-1}(U);x^i,y^i\right)$ разложение

$$\underset{k}{\gamma}T = y^{\alpha}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\cdots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\cdots j_s}\,{}^{\mathrm{V}}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_{k-1}}\otimes dx^{j_{k+1}}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s}.$$

Гамма-оператор $\underset{k}{\gamma}T$ будем также обозначать развернуто в виде $\gamma\left\{T\left(\ ,\underset{k}{\cdot},\ \right)\right\}$; гамма-оператор $\underset{1}{\gamma}T=\gamma\{T(\cdot,)\}$ будем обозначать кратко γT.

Нетрудно показать, что *если тензорное поле* T *определено глобально, то тензорное поле* $\underset{k}{\gamma}T$ *также определено глобально*.

Определение 10. Пусть аффинная связность ∇ в координатной окрестности U с системой координат $\left(u^k\right)_{k=\overline{1,n}}$ имеет компоненты $\Gamma_{j\,i}^{\,k}$. Определим в индуцированной координатной окрестности $\pi^{-1}(U)$ с индуцированной системой координат $\left(x^k,y^k\right)_{k=\overline{1,n}}$ аффинор (тензорное поле из $\mathfrak{T}_1^1\left(\pi^{-1}(U)\right)$) правилом

$$\gamma_\nabla=\Gamma_j^i\frac{\partial}{\partial y^i}\otimes dx^j+\delta_j^i\frac{\partial}{\partial y^i}\otimes dy^j,$$

где $\Gamma_j^i=y^s\Gamma_{s\,j}^{\,i}$.

Нетрудно показать, что *аффинор* γ_∇ *определен глобально на касательном расслоении* $\mathbf{T}M$.

Определение 11. $\underset{k}{\mathrm{E}}$-лифтом тензорного поля $T\in\mathfrak{T}_s^r(M)$ будем называть тензорное поле $T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}\in\mathfrak{T}_s^r(\mathbf{T}M)$, которое определяется равенством

$$T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=T^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\gamma_\nabla\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)$$

для произвольных векторных полей X_l, $1\le l\le s$, на M, где T^{C} – полный лифт тензорного поля [1].

При этом $\underset{1}{\mathrm{E}}$-лифт будем называть просто E-лифтом.

Теорема 3. Для произвольного тензорного поля $T\in\mathfrak{T}_s^r(M)$ на аффинно-связном пространстве (M,∇) имеют место равенства

$$\nabla^{\mathrm{H}}T^{\mathrm{H}}=(\nabla T)^{\mathrm{H}}-(\nabla T)^{\overset{\mathrm{E}}{s+1}},\ \nabla^{\mathrm{H}}T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}=(\nabla T)^{\overset{\mathrm{E}}{k}},\ \nabla^{\mathrm{H}}\left(\underset{k}{\gamma}T\right)=\underset{k}{\gamma}(\nabla T)+\overset{k\leftarrow s}{T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}}.$$

Следующая теорема является ключевым результатом данного пункта. Она устанавливает связь между тензорами $L_{m,X}$ и $L_{m,X^{\mathrm{C}}}$.

Теорема 4. Для произвольного векторного поля X на аффинно-связном пространстве (M,∇) рассмотрим тензорные поля

$L_{1,X} = L_X\nabla \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, $L_{k,X} = \nabla L_{k-1,X} \in \mathfrak{T}_{k+1}^1(M)$, и $L_{1,X^C} = L_{X^C}\nabla^H$, $L_{k,X^C} = \nabla^H L_{k-1,X^C}$. Тогда имеют место равенства

$$L_{m,X^C} = L_{m,X}{}^{H} - \sum_{j=3}^{m+1} L_{m,X}{}^{\overset{E}{j}} + \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L_{m+1,X}} + \sum_{j=3}^{m+1} \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow j}}{L_{m,X}{}^{E}}, \; m = 1,2,...$$

Следствие. Для произвольного векторного поля ξ справедливы равенства:

$$L_{m,X^C}\left(\xi^{m+1}\right) = L_{m,X}{}^{H}\left(\xi^{m+1}\right) -$$

$$-\sum_{j=3}^{m+1} L_{m,X}{}^{\overset{E}{j}}\left(\xi^{m+1}\right) + \gamma L_{m+1,X}\left(\xi^{m+1}\right) + (m-1) L_{m,X}{}^{E}\left(\xi^{m+1}\right)$$

для произвольного $m = 1,2,...$

6. Полный лифт инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования

Получена структура векторов $L_{m,X^C}\left(\xi^{m+1}\right)$ для инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования X.

Предложение 3. Имеет место равенство

$$L_{m,X^C}\left(\xi^{m+1}\right) = a_{m,V}(\xi)\delta^V(\xi) + a_{m,H}(\xi)\delta^H(\xi) + a_{m,E}(\xi)\delta^E(\xi) + a_{m,\gamma}(\xi)\gamma\delta -$$

$$-b_{m,V}(\xi)F^V(\xi) - b_{m,H}(\xi)F^H(\xi) - b_{m,E}(\xi)F^E(\xi) - b_{m,\gamma}(\xi)\gamma F,$$

где

$$a_{m,V}(\xi) = \gamma\left(\nabla^m\beta\right)\left(\xi^m\right) + (m+1)\left(\nabla^{m-1}\beta\right)^E\left(\xi^m\right), \; a_{m,H}(\xi) = 2\left(\nabla^{m-1}\beta\right)^V\left(\xi^m\right),$$

$$a_{m,E}(\xi) = (m-1)\left(\nabla^{m-1}\beta\right)^V\left(\xi^m\right), \; a_{m,\gamma}(\xi) = \left(\nabla^m\beta\right)^V\left(\xi^{m+1}\right),$$

$$b_{m,V}(\xi) = \gamma\left(\nabla^m\overline{\beta}\right)\left(\xi^m\right) + (m+1)\left(\nabla^{m-1}\overline{\beta}\right)^E\left(\xi^m\right), \; b_{m,H}(\xi) = 2\left(\nabla^{m-1}\overline{\beta}\right)^V\left(\xi^m\right),$$

$$b_{m,E}(\xi) = (m-1)\left(\nabla^{m-1}\overline{\beta}\right)^V\left(\xi^m\right), \; b_{m,\gamma}(\xi) = \left(\nabla^m\overline{\beta}\right)^V\left(\xi^{m+1}\right).$$

Кроме того,

$$b_{m,H}(\xi) = 0, \; m > 1, \; b_{m,E}(\xi) = 0, \; m > 1, \; b_{m,\gamma}(\xi) = 0, \; m \ge 1.$$

Пусть Y – векторное поле, образованное слоевыми координатами $\left(y^{\alpha}\right)_{\alpha=\overline{1,n}}$, а $V=V^{i}\dfrac{\partial}{\partial u^{i}}$ и $W=W^{i}\dfrac{\partial}{\partial u^{i}}$ – два произвольных векторных поля многообразия M. Для векторного поля $\xi=V^{i}\tilde{e}_{(i)}+W^{i}\tilde{e}_{(\bar{i})}$ в индуцированной координатной окрестности относительно адаптированного базиса [1] будем иметь

$$a_{r,\mathrm{V}}(\xi)=\left(\nabla^{r}\beta\right)\left(Y,V^{r}\right)+(r+1)\left(\nabla^{r-1}\beta\right)\left(W,V^{r-1}\right),\ a_{r,\mathrm{H}}(\xi)=2\left(\nabla^{r-1}\beta\right)\left(V^{r}\right),$$

$$a_{r,\mathrm{E}}(\xi)=(r-1)\left(\nabla^{r-1}\beta\right)\left(V^{r}\right),\ a_{r,\gamma}(\xi)=\left(\nabla^{r}\beta\right)\left(V^{r+1}\right),$$

$$b_{r,\mathrm{V}}(\xi)=\left(\nabla^{r}\overline{\beta}\right)\left(Y,V^{r}\right)+(r+1)\left(\nabla^{r-1}\overline{\beta}\right)\left(W,V^{r-1}\right).$$

Теорема 5. Пусть X – инфинитезимальное голоморфно-проективное преобразование, описываемое уравнением

$$L_{X}\nabla=\beta\otimes\delta+\delta\otimes\beta-\overline{\beta}\otimes F-F\otimes\overline{\beta}.$$

Тогда полный лифт X^{C} относительно связности горизонтального лифта ∇^{H} обладает следующими уплощающими свойствами:

(1) X^{C} является 1-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\beta=0$. При этом оно является абсолютно каноническим, а X – аффинным.

(2) X^{C} является 2-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\nabla\beta=0$, $\beta\neq 0$. При этом оно является абсолютно каноническим.

(3) X^{C} является 3-г.и.п. тогда и только тогда, когда $M^{1,2,3}_{\mathrm{V,E},\gamma}=0$, $M^{1,2,3}_{\mathrm{V,E;V}}=0$, $M^{1,2,3}_{\mathrm{V,E;H}}=0$, $M^{1,2,3}_{\mathrm{V},\gamma;\mathrm{V}}=0$, $M^{1,2,3}_{\mathrm{V},\gamma;\mathrm{H}}=0$, $M^{1,2,3}_{\mathrm{V;V,H}}=0$, $M^{1,2,3}_{\mathrm{E},\gamma;\mathrm{H}}=0$, а условия (2) не выполняются.

(4) X^{C} является 4-г.и.п. тогда и только тогда, когда $M^{1,2,3,4}_{\mathrm{V,E},\gamma;\mathrm{V}}=0$, $M^{1,2,3,4}_{\mathrm{V,E},\gamma;\mathrm{H}}=0$, $M^{1,2,3,4}_{\mathrm{V},\gamma;\mathrm{V,H}}=0$, $M^{1,2,3,4}_{\mathrm{V,E;V,H}}=0$, а условия (3) не выполняются.

(5) X^{C} является 5-г.и.п. тогда и только тогда, когда $M^{1,2,3,4,5}_{\mathrm{V,E},\gamma;\mathrm{V,H}}=0$, а условия (4) не выполняются.

(6) В общем случае полный лифт X^{C} является 6-г.и.п.

(7) При $r=3,4,5$ полный лифт X^{C} является абсолютно каноническим r-г.и.п. тогда и только тогда, когда $S_{2,\dots,r}\left(\nabla^{r-1}\beta\right)=0$, где $S_{2,\dots,r}$ обозначает симметрирование по всем индексам, кроме первого.

Доказательство. Введем обозначения: $\mathbf{a}_{\mathrm{V}}=\delta^{\mathrm{V}}(\xi)$, $\mathbf{a}_{\mathrm{H}}=\delta^{\mathrm{H}}(\xi)$, $\mathbf{a}_{\mathrm{E}}=\delta^{\mathrm{E}}(\xi)$, $\mathbf{a}_{\gamma}=\gamma\delta$, $\mathbf{b}_{\mathrm{V}}=F^{\mathrm{V}}(\xi)$, $\mathbf{b}_{\mathrm{H}}=F^{\mathrm{H}}(\xi)$, $\mathbf{b}_{\mathrm{E}}=F^{\mathrm{E}}(\xi)$, $\mathbf{b}_{\gamma}=\gamma F$. Кроме того, внешнее произведение $\mathbf{a}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_{i_k}$ будем обозначать $\mathbf{a}_{i_1}\ldots\mathbf{a}_{i_k}$.

(1) Приравняем слоевые координаты нулю $Y=0$. Тогда $\mathbf{a}_{\Upsilon}=0$, и

$$\delta^{\mathrm{H}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{2}\right)=a_{1,\mathrm{V}}(\xi)\mathbf{a}_{\mathrm{H}}\mathbf{a}_{\mathrm{V}}-b_{1,\mathrm{V}}(\xi)\mathbf{a}_{\mathrm{H}}\mathbf{b}_{\mathrm{V}}-b_{1,\mathrm{H}}(\xi)\mathbf{a}_{\mathrm{H}}\mathbf{b}_{\mathrm{H}}. \tag{5}$$

Если вектор $V\neq 0$, то вектора $\mathbf{a}_{\mathrm{V}}$, $\mathbf{a}_{\mathrm{H}}$, $\mathbf{b}_{\mathrm{V}}$, $\mathbf{b}_{\mathrm{H}}$ линейно независимы. В таком случае из равенства (5) следует, что равенство

$$\delta^{\mathrm{H}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{2}\right)=0 \tag{6}$$

влечет равенство $b_{1,\mathrm{H}}(\xi)=0$. Поскольку равенство $\overline{\beta}(V)=0$ выполняется для любого векторного поля V, то $\overline{\beta}=0$. Отсюда

$$\beta=0. \tag{7}$$

Обратно, пусть верно равенство (7). Тогда выполняется равенство $\overline{\beta}=0$, а также равенства $\nabla\beta=0$ и $\nabla\overline{\beta}=0$. С учетом этого получаем (6) и $L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{2}\right)=0$.

(2) Равенство

$$\delta^{\mathrm{H}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{2}\right)\wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{3}\right)=0$$

равносильно равенству

$$\nabla\beta=0. \tag{8}$$

Отметим, что равенство (8) выполняется в произвольно взятой точке $p\in M$ в предположении $\overline{\beta}_{p}\neq 0$. Допустим $\overline{\beta}_{p}=0$. Тогда либо существует такая окрестность точки p, в каждой точке q которой $\overline{\beta}_{q}=0$, либо в любой окрестности точки p существует такая точка q, что $\overline{\beta}_{q}\neq 0$. В первом случае, тождественно в указанной окрестности выполняется равенство $\nabla\overline{\beta}=0$. Отсюда приходим к равенству $\nabla\beta=0$. Во втором случае, по доказанному, верно равенство $(\nabla\beta)_{q}=0$. Применяя принцип продолжения тождеств по непрерывности, получим

$$(\nabla\beta)_{p}=\lim_{q\to p}(\nabla\beta)_{q}=0.$$

Таким образом, равенство (8) выполняется тождественно на M.

(3), (4) и (5) проверяются аналогично.

(6) Поскольку каждый минор шестого порядка содержит по крайней мере один столбец из нулей, то выполняется равенство

$$\delta^{\mathrm{H}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{2}\right)\wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{3}\right)\wedge L_{3,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{4}\right)\wedge$$

$$\wedge L_{4,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{5}\right)\wedge L_{5,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{6}\right)\wedge L_{6,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{7}\right)=0.$$

(7) Условие абсолютной каноничности r-г.и.п. имеет вид $L_{r,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{r+1}\right)=0$. Равенство $a_{r,\mathrm{V}}(\xi)=0$ при $Y=0$ и $r+1\neq 0$ примет вид

$$\left(\nabla^{r-1}\beta\right)\left(W,V^{r-1}\right)=0.$$

Оно выполняется для любых векторов W и V. Последнее равносильно требуемому.

Заключение

Получен инструментарий для исследования уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального преобразования относительно связности горизонтального лифта (теорема 4 и следствие из нее). Его использование позволило выявить уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального голоморфно-проективного преобразования (теорема 5). Свойство 1 теоремы 5 представляет собой условие, при котором порядок уплощения полного лифта совпадает с порядком уплощения самого инфинитезимального проективного преобразования (он равен 1). В связи с этим возникает задача нахождения условий, при которых полный лифт (уже произвольного инфинитезимального преобразования) сохраняет порядок уплощения.

Библиографический список

1. **Yano, K.** Tangent and cotangent bundles. Differential geometry / K. Yano, S. Ishihara. – New York : Marcel Dekker, 1973. – 434 p.
2. **Yano, K.** Differential geometry of tangent bundles of order 2 / K. Yano, S. Ishihara // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – Vol. 20, № 3. – P. 318–354.
3. **Лейко, С. Г.** Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия / С. Г. Лейко // Известия вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 62–71.
4. **Лейко, С. Г.** Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные концилкулярными преобразованиями базисного многообразия / С. Г. Лейко // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 35–45.
5. **Зубрилин, К. М.** Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях второго порядка, индуцированные концилкулярными преобразованиями баз / К. М. Зубрилин // Украинский математический журнал. – 2009 – Т. 61, № 3. – С. 346–364.
6. **Зубрилин, К. М.** Р-геодезические преобразования, индуцированные инфинитезимальными голоморфно-проективными преобразованиями келеровых пространств / К. М. Зубрилин // Известия вузов. Математика. – 2012. – № 11. – С. 36–50.
7. **Постников, М. М.** Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия : учеб. пособие для вузов / М. М. Постников. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 480 с.
8. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 344с.
9. **Tachibana, S.** On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds / S. Tachibana, S. Ishihara // Tohoku Math. J. – 1960. – Vol. 12, № 1. – P. 77–101.

References

1. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry*. New York: Marcel Dekker, 1973, 434 p.
2. Yano K., Ishihara S. *Kodai Math. Semin. Repts*. 1968, vol. 20, no. 3, pp. 318–354.
3. Leyko S. G. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Mathematics]. 1992, no. 2, pp. 62–71.
4. Leyko S. G. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Mathematics]. 1998, no. 6, pp. 35–45.
5. Zubrilin K. M. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal* [Ukrainian mathematical journal]. 2009, vol. 61, no. 3, pp. 346–364.
6. Zubrilin K. M. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2012, no. 11, pp. 36–50.
7. Postnikov M. M. *Lektsii po geometrii. Semestr III. Gladkie mnogoobraziya: ucheb. posobie dlya vuzov* [Lectures in geometry. Semester III. Smooth manifolds: tutorial for universities]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1987, 480 p.
8. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii* [Basic differential geometry]. Moscow: Nauka, 1981, 344 p.
9. Tachibana S., Ishihara S. *Tohoku Math. J.* 1960, vol. 12, no. 1, pp. 77–101.

Зубрилин Константин Михайлович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических и естественно-научных дисциплин, Керченский государственный морской технологический университет (филиал в г. Феодосия) (Россия, Республика Крым, г. Феодосия, пгт. Приморский, ул. Советская, 19)

Zubrilin Konstantin Mikhaylovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematical and natural-scientific subjects, Kerch State Maritime Technological University (branch in Feodosia) (19 Sovetskaya street, Primorsky urban community, Feodosia, the Republic of Crimea, Russia)

E-mail: kzubrilin@yandex.ru

УДК 517.764

Зубрилин, К. М.

Уплощенные инфинитезимальные преобразования касательного расслоения со связностью горизонтального лифта, порожденные инфинитезимальными голоморфно-проективными преобразованиями / К. М. Зубрилин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 18–32. DOI 10.21685/2072-3040-2017-4-2